Linguaggio comune e logica simbolica
Alcune osservazioni

1. - L'articolo di E. Grassini dal titolo « I numeri composti m che verificano la congruenza di Fermat $a^{m-1}-1 \equiv 0 \pmod{m}$ », comparso in questo « Periodico » nel Fascicolo 3 di questa annata, offre il destro ad alcune considerazioni riguardanti la logica simbolica ed il linguaggio comune.

Abbiamo deciso di scrivere brevemente sull'argomento perchè riteniamo di fare cosa utile anche a livello didattico: infatti in qualche progetto per il rinnovamento dell'insegnamento della matematica nei nuovi Licei compare esplicitamente la logica simbolica.

D'altra parte riteniamo necessario sottolineare l'utilità e l'efficacia del *buon uso* di questa disciplina: infatti vi sono ancora molti insegnanti di matematica, e non pochi matematici, i quali conservano la convinzione che basti a tutto il linguaggio comune, insieme con il buon senso, considerato come il fondamento di ogni dottrina logica. Si rileva d'altra parte anche una certa diffusione di notazioni che vorrebbero essere di logica simbolica, ma che di fatto non sono che abbreviazioni delle espressioni del linguaggio comune, e pertanto conservano tutti i difetti di questo, insieme con i pericoli di gravi confusioni.

2. - Nell'articolo citato di E. Grassini si trova un paragrafo intitolato « *Varie interpretazioni di un enunciato poco chiaro* », nel quale si leggono le frasi seguenti:

« Nel 1899, A. Korselt comunicò di aver trovato condizioni « sufficienti sull'intero m, affinchè $(a^m-a)/m$ sia intero per qua- « lunque a. Le condizioni sono:

« 1) i fattori primi di m siano tutti semplici (cioè m sia « libero da quadrati);

« 2) $m-1$ sia divisibile per il m.c.d. $(p_1-1,\ p_2-1, \dots,$
« $p_k-1)$ dove $p_1, p_2, \dots, p_k$ sono i fattori primi di m ».

E poco sotto il paragrafo prosegue così:

« Notiamo che l'enunciato precedente non è così inequivoca-
« bile come potrebbe a prima vista sembrare. Che significato si
« deve attribuire alla frase: '*a intero qualunque*'? L'interpreta-
« zione più immediata è '*ogni a, tutti gli a*'; inoltre questa stessa
« pare la più esatta, in quanto abbiamo già notato che le con-
« dizioni esposte sono equivalenti a quelle del CARMICHAEL. D'al-
« tra parte si potrebbe intendere '*un certo a, comunque scelto,*
« *ma determinato*'. In questo caso le condizioni sono ancora
sufficienti, ma possono non essere necessarie per particolari
« valori di a ».

Siamo dunque di fronte ad un caso in cui ad un enunciato che sembra inequivocabile, espresso in linguaggio comune, sono state date due interpretazioni, nettamente distinte; e ciò ha portato ad equivoci e discussioni molto lunghe, che non hanno avuto a nostro parere apprezzabili risultati, se non quello di riconoscere la validità di un teorema dato da M. CIPOLLA nel 1904, prima che iniziassero le discussioni cui accennavamo.

In particolare tali equivoci sono stati originati dall'uso della parola « qualunque »; uso che sarebbe quindi bene evitare il più possibile.

Invero quando si parla di una proprietà che vale « per un elemento qualunque di un insieme $\mathfrak{J}$ » si vuole dire abitualmente che essa vale per *ogni* elemento di $\mathfrak{J}$ cioè che deve valere per *tutte* le eventuali possibili scelte di un elemento di $\mathfrak{J}$.

Tuttavia non si può escludere, a rigore, anche una seconda interpretazione, che nell'articolo citato di E. GRASSINI viene definita « più riposta »: precisamente la interpretazione che assegna alla espressione « un elemento qualunque di $\mathfrak{J}$ » il senso di « un elemento scelto arbitrariamente, ma fissato, di $\mathfrak{J}$ ».

E non si creda che occorra andare tanto lontano per trovare esempi di espressioni del linguaggio comune che si prestano a questi equivoci.

Si pensi per es. alla definizione di limite di una successione $\{a_n\}$, così come si può leggerla in qualche testo:

« Si dice che il numero L è il limite della successione $\{a_n\}$

« di numeri, e si scrive

$$L = \lim_{n \to \infty} a_n$$

« se, preso un numero reale qualunque $\varepsilon > 0$, esiste un indice ν
« tale che, per qualunque n che sia maggiore di ν si abbia

$$|a_n - a_\nu| < \varepsilon \text{ ».}$$

Ovviamente in questo enunciato il termine « qualunque » vuole indicare, ogni volta, *tutti* gli elementi degli insiemi che si considerano; rispettivamente l'insieme dei reali positivi per quanto riguarda ε, e l'insieme degli interi naturali maggiori di ν per quanto riguarda n. Tuttavia a rigore non si può escludere la interpretazione che assegna al termine « qualunque » il significato di « un elemento scelto arbitrariamente, ma fissato, preso negli insiemi che si considerano ».

In tal caso, ovviamente, l'enunciato non darebbe la definizione abituale di limite di una successione $\{a_n\}$.

Ed il fatto che *abitualmente* l'enunciato venga preso in uno solo dei sensi possibili non esime evidentemente dall'obbligo di esprimersi in modo tale da evitare ogni altra interpretazione; abbiamo visto del resto che in teoria dei numeri una tale interpretazione è stata escogitata.

Nelle pagine che seguono vorremo dare l'esempio della trattazione delle questioni che sono state ricordate con i simboli della logica matematica, per mostrare la utilità di queste notazioni e di queste regole di deduzione ai fini della chiarezza e della univocità delle espressioni.

3. - Consideriamo anzitutto l'esempio tratto dall'articolo citato di E. Grassini e vediamo se la traduzione con la logica simbolica degli enunciati esposti può condurre ad un chiarimento più facile di quello che già è stato conseguito con lunghe discussioni. A tal fine facciamo le seguenti convenzioni:

I) Conveniamo di indicare con a ed m dei numeri interi naturali, escluso lo zero; nel seguito ogni volta che si dirà « intero » si intenderà dire « intero naturale ».

II) Indichiamo per brevità con

$$\mathfrak{R}(a,\ m)$$

la frase seguente:

$$\frac{a^m - a}{m} \text{ è intero.}$$

Più precisamente $\mathfrak{R}(a,\ m)$ è una *forma proposizionale aperta*, nelle due variabili a ed m, suscettibile di acquistare i due valori « vero » oppure « falso » se le variabili libere sono sostituite dal simbolo (per es. con le abituali cifre arabe) di qualche intero, oppure sono legate da qualche quantificatore.

In formule, con i simboli della logica matematica, indicando con J l'insieme dei numeri naturali, si potrebbe porre per definizione:

$$(1) \qquad \mathfrak{R}(a,\ m) =_{df} \exists h\{(h \in J) \wedge (a^m - a = hm)\}.$$

III) Indichiamo con $\mathfrak{C}(m)$ la proposizione la quale afferma che l'intero m possiede entrambe le due proprietà 1) e 2) sopra esposte, che qui enunciamo un'altra volta per comodità del lettore:

1) m è libero da quadrati;

2) indicati con $p_1, p_2, \dots, p_k$ i fattori primi di m, l'intero $(m-1)$ è divisibile per il m.c.d. $(p_1-1,\ p_2-1, \dots,\ p_k-1)$.

Anche in questo caso $\mathfrak{C}(m)$ è una forma proposizionale aperta, nella variabile m, suscettibile di acquistare i valori « vero » o « falso » quando la variabile libera m venga sostituita con il simbolo di un intero, oppure legata con un quantificatore.

Ciò premesso, vediamo di rappresentare simbolicamente le due interpretazioni della frase di Korselt richiamata all'inizio del paragrafo 2, frase che suona nel modo seguente:

« $(a^m - a)/m$ *è intero per a qualunque* ».

La prima interpretazione è « *per ogni a, per tutti gli a* » e si traduce simbolicamente legando la variabile libera a della forma proposizionale $\mathfrak{R}(a,\ m)$ con il quantificatore universale; si ottiene quindi

$$(2) \qquad \forall a \mathfrak{R}(a, m).$$

È questa una forma proposizionale nella quale la sola variabile libera è ora m; secondo questa interpretazione il teorema di Korselt afferma che $\mathfrak{C}(m)$ implica la forma (2) e quindi il teorema di Korselt può essere tradotto in simboli dalla formula

$$(3) \qquad \forall m[\mathfrak{C}(m) \rightarrow \forall a \mathfrak{R}(a, m)]$$

ed il suo inverso dalla formula

$$(3') \qquad \forall m[\forall a \mathfrak{R}(a, m) \rightarrow \mathfrak{C}(m)].$$

4. - Consideriamo ora l'altra interpretazione della frase del Korselt, interpretazione che porta a dare alla frase stessa il senso che le deriva se la espressione « *per a qualunque* » viene intesa come « *per un certo a, comunque scelto, ma fissato* ».

La traduzione in simboli di questa seconda interpretazione si ottiene chiaramente legando la variabile libera a nella forma proposizionale (1) con un quantificatore esistenziale, ottenendo così dalla (2) la forma

$$(4) \qquad \exists a \mathfrak{R}(a, m)$$

nella quale l'unica variabile libera è ancora m.

È del tutto ovvio che è vera la proposizione

$$(5) \qquad \forall m\{\forall a \mathfrak{R}(a, m) \rightarrow \exists a \mathfrak{R}(a, m)\};$$

pertanto è chiaro che dalla (3) e dalla (5) si trae la validità della

$$(6) \qquad \forall m[\mathfrak{C}(m) \rightarrow \exists a \mathfrak{R}(a, m)];$$

in altre parole le condizioni enunciate dal Korselt come *sufficienti* per il suo teorema sono sempre valide tanto quando la sua frase viene presa nel primo senso che quando viene presa nel secondo senso.

Ma è pure ovvio che dalla validità della (5) non segue la validità della

$$(7) \qquad \forall m\{\exists a \mathfrak{R}(a, m) \to \forall a \mathfrak{R}(a, m)\}.$$

Quindi, per quanto attiene all'inverso del teorema di Korselt, può avvenire che sia vera la (3′) e non sia vera la

$$(8) \qquad \forall m[\exists a \mathfrak{R}(a, m) \to \mathfrak{C}(m)].$$

In altre parole può avvenire che l'inverso del teorema di Korselt sia vero soltanto quando la frase di Korselt sia presa nel primo senso. Infatti i controesempi ricordati nell'articolo di E. Grassini mostrano che è vera la negazione della (8); per formulare tale negazione, osserviamo che la (8) può essere scritta nella forma equivalente

$$(8') \qquad \forall m\{\neg \exists a \mathfrak{R}(a, m) \vee \mathfrak{C}(m)\} \ (^1)$$

e la negazione della (8′) è

$$(9) \qquad \exists m[\neg\{\neg \exists a \mathfrak{R}(a, m) \vee \mathfrak{C}(m)\}].$$

Di qui, applicando le leggi di De Morgan (2) e la legge della doppia negazione (3) si giunge ad esprimere la negazione della (8) nella forma

$$(10) \qquad \exists m\{\exists a \mathfrak{R}(a, m) \wedge \neg \mathfrak{C}(m)\}.$$

Questa è appunto la proposizione della quale viene constatata la verità, con gli esempi dati da Chapron: $a=2$, $m=645$ oppure $a=2$, $m=1093^2$.

---

(1) Si ricordi che, quali che siano le proposizioni $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, la implicazione $\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{b}$ è equivalente alla alternativa $\neg \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}$.

(2) Ricordiamo che vengono chiamate « Leggi di De Morgan » quelle che affermano la equivalenza delle negazioni $\neg(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$ e $\neg(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b})$ rispettivamente alle $\neg \boldsymbol{a} \vee \neg \boldsymbol{b}$ ed $\neg \boldsymbol{a} \wedge \neg \boldsymbol{b}$ quali che siano le proposizioni $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

(3) Secondo questa legge, la doppia negazione $\neg(\neg \boldsymbol{a})$ di una proposizione qualunque $\boldsymbol{a}$ risulta equivalente alla proposizione $\boldsymbol{a}$.

5. - Per concludere, riportiamo a titolo di esercizio una possibile traduzione simbolica della frase che dà la definizione del limite di una successione $\{a_n\}$, secondo la interpretazione delle espressioni del linguaggio comune che, come abbiamo detto, è quella abituale ma non è l'unica possibile.

Intendendo di indicare con ε un elemento del campo reale e con ν ed n degli elementi dell'insieme dei numeri naturali, tale traduzione potrebbe essere la seguente:

$$[\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = L] =_{\mathrm{def}} \forall \varepsilon[(\varepsilon > 0) \longrightarrow \exists \nu \{ \forall n[(n > \nu) \longrightarrow (|a_n - L| < \varepsilon)] \}].$$

Appare facile controllare di qui, in base alla esistenza dei quantificatori che compaiono nel secondo membro della formula di definizione, che questa è inequivocabile.

È quindi evidente la opportunità di rendere il simbolismo della logica familiare ai matematici, perchè tale formalismo, come abbiamo detto, risulta essere di estrema utilità, ed anzi spesso si dimostra uno strumento quasi indispensabile per evitare equivoci e confusioni.

C. F. Manara